**BAB 8**

**TEKNIK PENGINTEGRALAN**

* Standar Kompetensi

Mahasiswa dapat menerapkan teknik pengintegralan untuk menentukan nilai integral.

* Kompetensi dasar

1. Mahasiswa dapat menerapkan teknik integral parsial untuk mencari nilai integral.
2. Mahasiswa dapat menentukan nilai interal fungsi trigonometri.
3. Mahasiswa dapat menerapkan teknik substitusi trigonometri untuk mencari nilai integral.
4. Mahasiswa dapat menentukan integral fungsi rasional.
5. Mahasiswa dapat menerapkan teknik substitusi yang merasionalkan untuk menentukan nilai integral.

* Pokok Bahasan

1. Integral parsial
2. Integral fungsi trigonometri
3. Integral substitusi trigonometri
4. Integral fungsi rasional
5. Substitusi yang merasionalkan

Salah satu kendala yang sering dijumpai dalam pengintegralan adalah tidak semua fungsi integran mempunyai anti turunan. Pengintegralan melibatkan berbagai teknik dan banyak teknik pengintegralan yang hasilnya bukan hanya fungsi-fungsi elementer atau fungsi dasar. Oleh karena itu dikembangkan metode atau teknik pengintegralan untuk menyatakan integran dalam bentuk baku rumus-rumus dasar integral.

Berikut dibahas berbagai Teknik Pengintegralan, antara lain:

* 1. **Integral Parsial**

Jika aturan substitusi digunakan untuk menyelesaikan integral yang berkaitan dengan aturan rantai, maka untuk menyelesaikan integral yang berkaitan dengan aturan hasil kali turunan digunakan rumus integral parsial.

Diketahui fungsi  dan  terdiferensial (mempunyai turunan) pada interval , maka



.

Jika kita misalkan  dan  maka



yang disebut rumus integral parsial.

Contoh 8.1 Tentukan .

Solusi:

Misalkan  maka 

 maka 



.

Contoh 8.2 Tentukan .

Solusi:

Misalkan  maka 

 maka 







.

Contoh 8.3 Tentukan integral .

Solusi:

Misalkan  maka 

 maka 









.

Contoh 8.4 Tentukan integral .

Solusi:

Misalkan  dan 



.

Contoh 8.5 Tentukan integral dari .

Solusi:

Misalkan  dan 





.

Contoh 8.6 Tentukan integral .

Solusi:

Misalkan  dan .







.

**Latihan 8.1**

Tentukan hasil dari integral berikut!

1.  6. 
2.  7. 
3.  8. 
4.  9. 
5.  10. .
   1. **Integral Fungsi Trigonometri**

Integral Fungsi Trigonometri bentuk .

1. Jika pangkat dari kosinus ganjil () maka misalkan  dan gunakan .





1. Jika pangkat sinus ganjil () maka misalkan  dan gunakan .





1. Jika baik pangkat sinus atau pangkat kosinus semuanya ganjil maka gunakan salah satu aturan di atas.
2. Jika baik pangkat sinus maupun kosinus genap maka gunakan kesamaan sudut paruh, , , atau .

Contoh 8.7 Tentukan hasil dari integral .

Solusi:







.

Atau

Misalkan  maka 











.

Contoh 8.8 Tentukan integral dari .

Solusi:

Misalkan  maka .











.

Contoh 8.9 Tentukan integral .

Solusi:

Misalkan  maka 









.

Contoh 8.10 Tentukan integral .

Solusi:





.

 dan

 dicari dengan metode substitusi, yaitu

Misalkan  maka .

.

Jadi, .

**Latihan 8.2**

Carilah hasil dari integral di bawah ini!

1.  6. 
2.  7. 
3.  8. 
4.  9. 
5.  10. .
   1. **Integral Substitusi Trigonometri**

Untuk menyelesaikan integral yang memuat bentuk akar kuadrat diperlukan substitusi trigonometri agar bentuk akarnya hilang. Teknik pengintegralan substitusi trigonometri menggunakan segitiga siku-siku.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Bentuk | substitusi | kesamaan |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Contoh 8.11 Tentukan integral .

Solusi:

Misalkan  maka .







*x*



1





.

Contoh 8.12 Tentukan hasil integral dari .

Solusi:

Misalkan  maka 









.

Contoh 8.13 Tentukan hasil integral dari .

Solusi:

Misalkan  maka 





.

Contoh 8.14 Tentukan integral .

Solusi:

Misalkan  maka 









Misal  maka





.

.

**Latihan 8.3**

Tentukan hasil integral di bawah ini!

1.  6. 
2.  7. 
3.  8. 
4.  9. 
5.  10. 
   1. **Integral Fungsi Rasional**

Diingatkan kembali bahwa fungsi rasional berbentuk . Fungsi rasional dapat dinyatakan sebagai jumlahan fungsi parsial.

Contoh 8.15 Carilah integral dari .

Solusi:

 dapat ditulis 





.

Integral fungsi rasional dapat digunakan bila derajat (pangkat) fungsi  lebih kecil dari derajat (pangkat) fungsi . Bila derajat  lebih besar dari derajat  maka bagilah  dengan  sehingga diperoleh bentuk

.

1. Bila  adalah hasil kali n faktor linear yang berbeda.

 dapat ditulis



Maka ada  sehingga

.

Contoh 8.16 Tentukan hasil dari integral .

Solusi:





Dengan menyamakan koefisien diperoleh  dan  sehingga



.

1. Bila  adalah hasil kali n faktor linear, beberapa diantaranya berulang.

Misalkan faktor linear  muncul  kali maka

Contoh 8.17 Hitung !

Solusi:





sehingga dengan menyamakan koefisien diperoleh .



.

1. Bila  mengandung faktor kuadrat yang tak dapat diuraikan dan tak ada yang berulang.

Contoh 8.18 Hitung !

Solusi:

.

Dengan menyamakan koefisien diperoleh , sehingga



1. Bila  mengandung faktor kuadrat yang tak dapat diuraikan dan ada yang berulang.

Contoh 8.19 Hitunglah !

Solusi:



Dengan menyamakan koefisien diperoleh 



.

**Latihan 8.4**

Tentukan integral berikut ini!

1.  3.  5. 
2.  4.  6. .
   1. **Substitusi yang Merasionalkan**

Beberapa fungsi yang tidak rasional dapat diubah menjadi fungsi rasional dengan cara substitusi. Jika sebuah integran berbentuk  maka substitusi  dapat kita gunakan.

Contoh 8.20 Tentukan .

Solusi:

Misalkan  maka  sehingga 



.

Perhatikan!



.

Dengan menyamakan koefisien kita peroleh .

Dengan demikian kita dapatkan







Jadi .

**Latihan 8.5**

Tentukan integral dari

1.  2. 